ICARE

SESSION 1996

EPREUVE DE MATHEMATIQUES 2

Filières M, M', P et P'

(Durée 4 heures)

Exercice 1

L'espace euclicien de dimension 3 est rapporté à la base orthonormée directe $\Theta = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note A la rotation d'axe Vect($\vec{i}$) et d'angle π, B la rotation d'axe Vect($\vec{k}$) et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, C la rotation d'axe Vect($\vec{k}$) et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

1) **Ecrire dans la base $\Theta = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les matrices de A, B, C, AB et BA.**

2) **Identifier précisement les transformations AB et BA, et vérifier que l'on a : $AB^2=BA$ et $B^2A=AB$.**

3) **En déduire la composition du groupe G engendré par A, B et C.**

Exercice 2

Soit E = $M_2(\mathbb{R})$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On considère Ψ_U : $M2(\mathbb{R}) \to M2(\mathbb{R})$, $M \mapsto MU$

1) **Ecrire la matrice de Ψ_U dans la base canonique de E.**

2) **Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de Ψ_U ?**
Ψ_U est -il diagonalisable ?

Problème

E désigne un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps IK. (IK = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L(E) désigne l'ensemble des endomorphismes de E.
Soit u un élément de L(E) ; u est un projecteur si et seulement si $u^2 = uou = u$.

A) Soient p et q deux projecteurs.

1) Montrer que p et q sont diagonalisables.

2) Montrer que p+q est un projecteur si et seulement si poq = qop = 0.

3) Dans le cas où p+q est un projecteur,

a) Montrer que p et q sont simultanément diagonalisables ;

(i.e. il existe une base de E de vecteurs propres communs à p et à q).

b) Déterminer Im(p+q) et Ker(p+q).

B) Soient $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ n endomorphismes non nuls de E. On suppose que $\forall (i,j) \in \{1,2, ...,n\}^2$, $\varphi_i o \varphi_j = \delta_{i,j}\varphi_i$ ($\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker : $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$).

1) Prouver que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} Im(\varphi_i)$.

2) En déduire que $\forall i \in \{1,2, ...,n\}, rg(\varphi_i) = 1$, **et que** $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = id$.

3) soit $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$, une autre famille d'endomorphismes non nuls de E vérifiant également :

$$\forall (i,j) \in \{1,2, ...,n\}^2 , \mu_i o \mu_j = \delta_{i,j}\mu_i.$$

Montrer qu'il existe un élément ω de $GL_n(E)$, l'ensemble des endomorphismes inversibles de E, tel que : $\forall i \in \{1,2, ..., n\}, \quad \mu_i = \omega \circ \varphi_i \circ \omega^{-1}$.

C) Soit f un endomorphisme de E diagonalisable ; $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ désignent ses valeurs propres deux à deux distinctes, $E_1, E_2, ..., E_r$ les sous-espaces propres associés.

Montrer qu'il existe une famille $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_r$ de projecteurs de E tels que :

$(\forall (i,j) \in \{1,2, ..., r\}^2, i \neq j \Rightarrow \rho_i \circ \rho_j = 0)$ **et** $(\forall k \in IN, f^k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k \rho_i)$

D) Soient u,v,w trois endomorphismes de E vérifiant :

$$uov = vou = uow = wou = vow = wov = 0 \quad \text{et} \quad u + v + w = id.$$

Montrer que g= u + v - 2w est diagonalisable.

Préciser ses valeurs propres et les sous-espaces propres associés.